**Екстремуми функції багатьох змінних**

Точка  називається точкою ***локального максимуму*** (***мінімуму***) функції , якщо існує  така, що  виконується нерівність:  . Максимуми та мінімуми функції називаються її ***екстремумами***. Якщо  виконується строга нерівність, то відповідний ***екстремум*** називається ***строгим***.

Таким чином для локального екстремуму функції в деякому околі екстремальної точки приріст функції  є знакосталим, недодатним для максимуму, невід’ємним – для мінімуму.

|  |  |
| --- | --- |
| **Теорема 1.** | *(Необхідна умова екстремуму)* |
|  | Якщо в точці  функція  диференційовна і має в цій точці локальний екстремум, то , або, що теж саме , . |

Для *доведення* достатньо зафіксувати усі координати точки крім однієї. Далі просто достатньо скористатися необхідною умовою екстремуму функції однієї змінної.

Точки області визначення функції , в яких   називаються ***стаціонарними***. Легко зрозуміти, що не кожна стаціонарна точка – екстремум, і навпаки, не кожний екстремум є стаціонарною точкою.

|  |  |
| --- | --- |
| **Приклад 1** | Дослідити на екстремум функцію . |
|  | Зрозуміло, що , а тому точка  - точка мінімуму, але сама функція в цій точці не диференційовна, а тому ця точка не є стаціонарною. |

Квадратична форма (КФ) відносно змінних 

 **(1)**

називається ***додатно*** (***від’ємно***) ***визначеною***, якщо , які одночасно не дорівнюють нулеві, ця КФ приймає строго додатні (від’ємні) значення. В таких випадках ця КФ називається ***знакосталою*** (***знаковизначенною***). КФ називається ***знакозмінною***, якщо вона приймає як додатні так і від’ємні значення. КФ називається ***квазізнаковизначенною***, якщо вона приймає лише невід’ємні (недодатні) значення, але приймає також нульові значення на ненульовому наборі .

***Кутовими мінорами*** квадратної матриці  називаються такі  визначників цієї матриці: , ,..., .

|  |  |
| --- | --- |
| **Теорема 2.** | *(Критерій Сільвестра)* |
|  | Для того, щоб КФ з симетричною матрицею  була додатно (від’ємно) визначеною, необхідно й достатньо, щоб для її кутових мінорів виконувались умови:   . |

*Без доведення.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Теорема 3.** | *(Достатня умова локального екстремуму)* |
|  | Для того, щоб двічі диференційовна в точці  функція, в якій , мала в цій точці екстремум, достатньо, щоб її другий диференціал був знаковизначеною КФ в точці . Якщо  буде додатно (від’ємно) визначеною КФ, то в точці  має локальний мінімум (максимум). Якщо  є незнаковизначеною КФ, то в точці  локального екстремуму немає. |

*Доведення*. З локальної формули Тейлора можна записати приріст функції в такому вигляді: , а тому з урахуванням необхідної умови екстремуму, маємо: . Розпишемо другий диференціал: , де , , , а  - квадратична форма на векторі , що відповідає другому диференціалу. За побудовою . Оскільки  - неперервна функція на сфері , то за теоремою Вейєрштрасса вона набуває своїх мінімуму та максимуму на цій сфері. Тому, якщо КФ додатно визначена, то   :       при достатньо малих  маємо, що , а тому  - точка локального мінімуму. Повністю аналогічно при від’ємній визначеності КФ доводиться, що  – точка локального максимуму.

Якщо ж  не знаковизначена КФ, то екстремуму немає, оскільки в будь-якому околі точки приріст буде приймати як додатні, так і від’ємні значення.

*Теорема доведена.*

Якщо  квазізнаковизначена КФ, то для дослідження на екстремум треба продовжувати вивчення безпосередньо приросту функції, або інші міркування.

***Умовний екстремум***

Розглянемо задачі про знаходження екстремуму функції багатьох змінних, коли аргументи функції зв’язані додатковими умовами. Такі екстремуми називаються умовними екстремумами. Наприклад, знайти екстремум функції , якщо . Виразимо *у* з умови зв’язку і підставимо в функцію: , будемо мати задачу на безумовний екстремум. В т. , функція має екстремум, а функція  має умовний екстремум  в т. (1,1), який не співпадає з безумовним екстремумом: мінімум параболоїд обертання має в т (0,0) і .

# ***Постановка задачі про умовний екстремум***

Потрібно знайти екстремум функції  змінних

 

при умовах зв’язку



 

..........................................

, 

Функція визначена в деякій області , (2) називають рівняннями зв’язку.

О. Функція  має в т.  умовний максимум (мінімум), якщо  окіл точки - :  виконуються умови:  (), при умові, що точки  і  задовольняють рівнянням зв’язку (2).

# Знаходження умовного екстремуму можна звести, при умові розв’язку системи (2), до розв’язку задачі безумовного екстремуму. Для цього припустимо, що диференційовні в деякому околі т. , а в самій точці частинні похідні цих функцій по неперервні, а якобіан



Тоді (2) підлягає теоремі про існування і диференційованість неявних функцій, заданих системою рівнянь, а отже (2) задає однозначні неявні функції



 

........................



Підставивши (3) в (1), зведемо питання про існування умовного екстремуму в т. функції (1) при умові (2) до питання існування безумовного екстремуму функції в т. : 

Не розв’язуючи систему (2), встановимо необхідні умови існування умовного екстремуму в т. .

Нехай  диференційовна в т.  і має в цій точці умовний екстремум, або, що те саме, функція  має в т.  безумовний екстремум. Необхідною умовою безумовного екстремуму функції  в т.  є рівність нулю в цій точці диференціала цієї функції:

, тотожна відносно , ..., :  (4)

В силу інваріантності форми першого диференціалу і рівності (4) диференціал  запишемо так:

 (5)

Тут  - це диференціали функцій (3) і  не дорівнюють нулю.

Про диференціюємо рівняння зв’язку (2):

 (6)

...........................



Оскільки якобіан відмінний від нуля в т. , то розв’яжемо систему (6) і знайдемо  як лінійні функції . Якщо знайти ці вирази і підставити в (5), то будемо мати:

 (7)

де  раціональні функції частинних похідних  в т. . В рівності (7) містяться диференціали незалежних змінних , то робимо висновок, що всі . Додамо до цих умов *т* умов зв’язку (2): .

Ці рівності – система *m+n* рівнянь для визначення *(m+n)* координат точки можливого екстремуму.

***Метод невизначених множників Лагранжа***

Помножимо рівності (6) на довільні, поки що невизначені постійні множники  і додамо почленно до рівності (5). Отримаємо



Введемо функцію  рівність (8) матиме вигляд:



Функцію  будемо називати функцією Лагранжа. Виберемо множники  так, щоб виконувались рівності 

Це можна зробити і отримати лінійну систему



………………

, якобіан якої відмінний від нуля. Рівність (9) набуде вигляду 

Оскільки  - диференціали незалежних змінних, то 

Приєднаємо до рівнянь (10) і (11) рівняння зв’язку і отримаємо систему  рівнянь:







для визначення  координат точок можливого екстремуму та *т* множників Лагранжа . При практичній реалізації цього метода складають функцію Лагранжа і для цієї функції знаходять точки можливого безумовного екстремуму. Для виключення множників  долучають умови зв’язку.

***Достатні умови***

Припустимо існування і неперервність других похідних для функції  і ,  в т. .

Обчислимо другий диференціал функції :



Нам потрібно визначити знак  в т. .

Приклад 110 к.

 ()







М(1,1,1)



,







